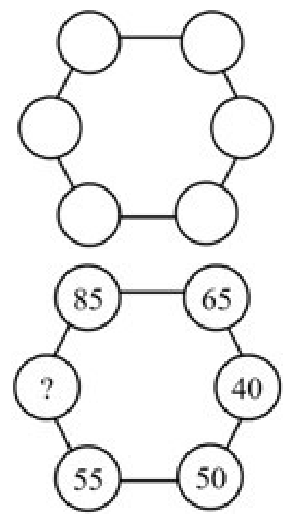
6 класс

6.1 Найдите самое маленькое число, у которого все цифры различны, сумма первых двух цифр (слева) делится на 2, сумма первых трех цифр делится на 3, сумма первых четырех цифр делится на 4, первых пяти цифр делится на 5, первых шести цифр делится на 6.

6.2 В Солнечном городе 5 коротышек едят пончики ежедневно, 7 коротышек едят пончики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 9 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

6.3 Бегун пробежал в первом забеге два круга по стадиону со скоростью v за 4 минуты. Во второй раз он пробежал первый круг со скоростью p, а второй круг со скоростью $v/2$ и потратил на второй забег 5 минут. Найдите отношение $v : p$.

6.4 На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке. На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 10 мух, и положила по 5 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух могло оказаться на шестой кочке?



6.5 За круглый стол сели 9 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего каждый сказал: «У меня монет больше, чем у соседа справа». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

6 класс

Найдите самое маленькое число, у которого все цифры различны, сумма первых двух цифр (слева) делится на 2, сумма первых трех цифр делится на 3, сумма первых четырех цифр делится на 4, первых пяти цифр делится на 5, первых шести цифр делится на 6.

Ответ. 132684.

Решение. Число должно состоять не менее чем из 6 цифр. Будем составлять 6-значное число. Из всех таких чисел меньше то, у которого самая маленькая пер- вая (слева) цифра. Запишем на первое место единицу. Вторая цифра должна быть нечетной. Цифру 1 уже использовали. Значит, вторая цифра – 3. Рассуждая анало- гично, получаем ответ – число 132684.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 5 баллов.

6.1. В Солнечном городе 5 коротышек едят пончики ежедневно, 7 коротышек едят пон- чики через день, а остальные вообще не едят пончики. Вчера 9 коротышек ели пончики. Сколько коротышек будут есть пончики сегодня?

Ответ. 8.

Решение. Из тех 9 коротышек, что вчера ели пончики, 5 коротышек едят их ежедневно, значит остальные 9 5 = 4 едят их через день. Поэтому сегодня эти четверо есть пончики не будут, а остальные 7 4 = 3 из тех, кто ест через день – будут. Так что сегодня едят пончики эти трое, а также те пятеро, кто ест пончики всегда. Получаем ответ 3 + 5 = 8.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

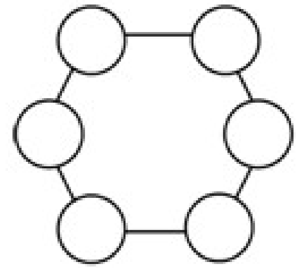
6.2. Бегун пробежал в первом забеге два круга по стадиону со скоростью v за 4 минуты. Во второй раз он пробежал первый круг со скоростью p, а второй круг со скоростью $v/2$ и потратил на второй забег 5 минут. Найдите отношение $v : p$.

Ответ. $v : p = 1 : 2$.

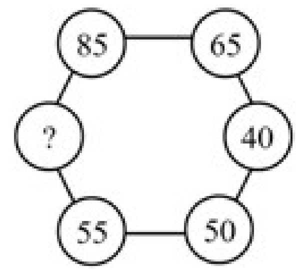
Решение. Во втором забеге второй круг бегун пробежал со скоростью в два раза меньше, значит, на него он затратил 4 минуты (как в первом забеге на два круга). Значит, первый круг во втором забеге он пробежал за 5   4 = 1 (мин). Длина первого и второго кругов одинакова, поэтому $v/2 : p = 1 : 4$, откуда $v : p = 1 : 2$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

6.3. На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.

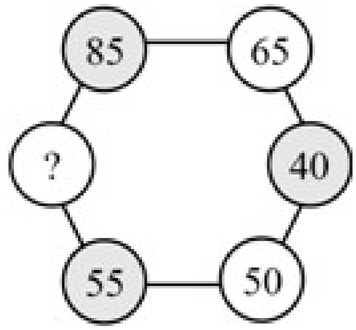


На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обя- зательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 10 мух, и положила по 5 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух могло оказаться на шестой кочке?



Ответ. 65.

Решение. Раскрасим кочки по порядку: серая-белая-серая-....



Заметим, что каждая лягушка положила по 5 мух на одну белую и на одну серую кочку. Это значит, что суммарное количество мух, оказавшихся на серых кочках равно количеству мух, оказавшихся на белых кочках (а также в 5 раз больше общего количества лягушек).

1) $85 + 40 + 55 = 180$ (мух) – всего;

2) $180 - 50 - 65 = 65$ – на шестой кочке.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

6.4. За круглый стол сели 9 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждому из них дали по монете. Затем каждый из сидящих передал свою монету одному из двух своих соседей. После чего каждый сказал: «У меня монет больше, чем у соседа справа». Какое наибольшее число рыцарей могло сидеть за столом?

Ответ. 6.

Решение. После передачи монет у каждого из сидящих за столом может быть 0, 1 или 2 монеты. Заметим, что 3 рыцаря не могут сидеть подряд. Действительно, пусть рыцари A, B, C сидят рядом, причем B сидит справа от A, C сидит справа от B, а еще справа от C сидит D. Если у A будет x монет, у B – y монет, у C – z монет, а у D
– t монет, то будет выполняться неравенство $x > y > z > t$, которое невозможно для чисел 0, 1, 2. Значит, среди любых 3 подряд сидящих есть лжец. Разобьем сидящих за столом на 3 группы по 3 человека сидящих рядом. В каждой из этих групп есть лжец. Значит, за столом сидит не менее 3 лжецов, и поэтому не более 6 рыцарей. Покажем, что за столом могло сидеть 6 рыцарей. Пусть они сидят так: -Р-Р-Л-Р-Р- Л-Р-Р-Л-. И сидящие рядом рыцари обменяются монетами, а лжецы отдадут свои монеты рыцарям, сидящим от них справа. Тогда количества монет у сидящих будет
-Р(2)-Р(1)-Л(0)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-Р(2)-Р(1)-Л(0)-. И рыцари скажут правду, а лжецы солгут.

Комментарий. Доказано, что за столом сидит не более 6 рыцарей — 5 баллов. Доказано, что за столом может сидеть 6 рыцарей — 2 балла.